**专题07 经典超越不等式**

**一、结论**

**(1)对数形式:,当且仅当时,等号成立.**

**(2)指数形式:,当且仅当时,等号成立.**

**进一步可得到一组不等式链：（且）**

**上述两个经典不等式的原型是来自于泰勒级数：**

**；**

**；**

**截取片段：**

****

**，当且仅当时,等号成立；**

**进而：当且仅当时,等号成立**

**二、典型例题**

1．（2022·江苏苏州·高三期末）已知 则下列不等式一定成立的是（ ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【解析】

取，则，故A选项错误；

取，，，则B选项错误；

取，，则，，即，

故D选项错误；

关于C选项，先证明一个不等式：，令，，

于是时，递增；时，递减；

所以时，有极小值，也是最小值，

于是，当且仅当取得等号，

由，当时，同时取对数可得，，

再用替换，得到，当且仅当取得等号，

由于，得到，，，即，

C选项正确.

故选：C.

**【反思】对于指数形式:,当且仅当时,等号成立，该不等式是可以变形使用的：**

****

**注意使用时的取值范围；**

**同样的还可以如下处理：两边同时取对数：**，同样可以变形使用：

；



**注意使用时的取值范围.**

2．（2021·安徽·高三阶段练习（文））已知函数.

(1)若对，都有，求实数*a*的取值范围；

(2)若*a*、，且，求证：对任意，都有：.

【答案】(1)(2)证明见解析

【解析】

(1)由时：

又：,

①若时，由，故，

所以对任意，都有：

此时函数在上单调递增，故对任意，都有：满足条件.

②若时，由，故：

故可得：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |
|  | - | 0 | + |
|  |  | 极小值 |  |

故函数在上单调递减，在上单调递增,

故：不满足条件，都有,

综上，实数*a*的取值范围为.

(2)由（1）可知，当时，对任意，都有：,

故对任意，都有：,

又*a*、，故对任意，都有：，

又，故：

故对任意，都有：.

**【反思】注意在解答题中不能直接使用，需要证明后才可以使用，才可以进一步变形得到有利于解题的不等式.**

**三、针对训练 举一反三**

**一、单选题**

1．（2022·广东韶关·一模）已知，则（ ）

A． B．

C． D．

2．（2022·山西运城·（理））已知命题：，；命题：，则下列命题中为真命题的是（ ）

A． B． C． D．

3．（2021·广东肇庆·）下列不等式中，不恒成立的是（ ）

A． B．

C． D．

4．（2021·安徽·东至县第二中学（理））下列不等式正确的个数有（ ）个.

①；②；③

A．0 B．1 C．2 D．3

5．（2020·黑龙江哈尔滨·（理））下列四个命题中的假命题为（ ）

A．， B．，

C．， D．，

6．（2019·湖北·（文））下列不等式中正确的是

①；②；③.

A．①③ B．①②③ C．② D．①②

7．（2020·全国·（理））已知命题：，，命题：，，则下列命题正确的是

A． B． C． D．

8．（2021·安徽·毛坦厂中学高三阶段练习（理））设，，，（其中自然对数的底数）则（ ）

A． B． C． D．

9．（2022·全国·高三专题练习）若正实数，满足，则（ ）

A． B．

C． D．

**二、填空题**

10．（2020·广东·高三阶段练习）已知函数的反函数为，若实数*m*、*n*满足，则 \_\_\_\_．

11．（2020·北京·中关村中学）已知函数，，其中，e为自然对数的底数，若，使，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**三、解答题**

12．（2022·浙江·高三专题练习）证明以下不等式：

(1)；

(2)；

(3).

13．（2022·全国·高三专题练习）已知.

(1)求函数的单调区间；

(2)设函数，若关于的方程有解，求实数的最小值；

(3)证明不等式：.